2.a) $S_n=\sum_{k=0}^{k=n}(-x)^k$ est la somme de (n + 1) termes d'une suite géométrique de raison $q=-x\neq 1$. Alors

$S_n=\frac{1-(-x)^{n+1}}{1+x}=\frac{1}{1+x}+\frac{(-1)^n x^{n+1}}{1+x}$. D'une part on a : $\int_0^1 S_n dx=\int_0^1\frac{1}{1+x}dx+\int_0^1\frac{(-1)^n x^{n+1}}{1+x}dx$

$=\left[\ln(1+x)\right]_0^1+(-1)^n\int_0^1\frac{x^{n+1}}{1+x}dx$ d'autre part : $\int_0^1\left(1-x+x^2+.....+(-1)^n x^n\right)dx=\left[x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+....+\frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1$

$=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+.....+\frac{(-1)^n}{n+1}=V_n$ d'où $V_n=\ln 2+(-1)^n\int_0^1\frac{x^{n+1}}{1+x}dx$

b) $0\leq x\leq 1$ alors $1\leq x+1\leq 2$ $d'où$ $1\geq\frac{1}{x+1}\geq\frac{1}{2}\Rightarrow x^{n+1}\geq\frac{x^{n+1}}{x+1}\geq\frac{x^{n+1}}{2}$ on aura alors :

$\left|V_n-\ln 2\right|=\left|\int_0^1\frac{x^{n+1}}{1+x}dx\right|\leq\int_0^1 x^{n+1}dx$ comme $\int_0^1 x^{n+1}dx=\left[\frac{x^{n+2}}{n+2}\right]_0^1=\frac{1}{n+2}$ d'où $\left|V_n-\ln 2\right|\leq\frac{1}{n+2}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n+2}=0$ alors

$\lim\limits_{n\to+\infty}V_n=\ln 2$.

3.a) $\begin{pmatrix}f'(x)=x^n\Leftarrow f(x)=\frac{x^{n+1}}{n+1}\\ g(x)=\ln(1+x)\Rightarrow g'(x)=\frac{1}{1+x}\end{pmatrix}$ alors : $U_n=\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\ln(1+x)\right]_0^1-\int_0^1\frac{1}{n+1}.\frac{x^{n+1}}{1+x}dx=\frac{1}{n+1}\ln 2-\frac{1}{n+1}\int_0^1\frac{x^{n+1}}{n+1}dx$

comme $V_n=\ln 2+(-1)^n\int_0^1\frac{x^{n+1}}{1+x}dx$ alors $\int_0^1\frac{x^{n+1}}{1+x}dx=\frac{V_n-\ln 2}{(-1)^n}$ Ainsi

$U_n=\frac{1}{n+1}\ln 2-\frac{1}{n+1}\left(\frac{V_n-\ln 2}{(-1)^n}\right)=\frac{\ln 2}{n+1}+\frac{(-1)^n}{n+1}(\ln 2-V_n)$

b) $W_n=(n+1)U_n=\ln 2+(-1)^n(\ln 2-V_n)\Rightarrow W_n-\ln 2=(-1)^n(\ln 2-V_n)\Rightarrow\left|W_n-\ln 2\right|=\left|\ln 2-V_n\right|$ comme

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left|V_n-\ln 2\right|=0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|W_n-\ln 2\right|=0$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty}W_n=\ln 2$ donc W est une suite convergente.

Exercice N°15: 1. on a : $f'(x)=\frac{\frac{1}{x}x^2-2x\ln x}{x^4}=\frac{x(1-2\ln x)}{x^4}=\frac{1-2\ln x}{x^3}$ or : $\forall x\in\mathbb{R}_+^*$ on a :

$1-2\ln x>0\Leftrightarrow\frac{1}{2}>\ln x\Leftrightarrow e^{\frac{1}{2}}>x$ donc f est strictement croissante sur $\left]0,\sqrt{e}\right[$ et strictement décroissante sur $\left[\sqrt{e},+\infty\right[$.

2)a)Comme $\sqrt{e}<2$, la fonction f est strictement décroissante sur $[2,+\infty[$. On a donc : $k\leq x\leq k+1\Rightarrow$

$f(k+1)\leq f(x)\leq f(k)$ soit : $\frac{\ln(k+1)}{(k+1)^2}\leq\frac{\ln(x)}{x^2}\leq\frac{\ln(k)}{k^2}(k\geq 2)\Rightarrow\int_k^{k+1}\frac{\ln(k+1)}{(k+1)^2}dx\leq\int_k^{k+1}\frac{\ln(x)}{x^2}dx\leq\int_k^{k+1}\frac{\ln(k)}{k^2}dx$

soit $\frac{\ln(k+1)}{(k+1)^2}\int_k^{k+1}dx\leq\int_k^{k+1}\frac{\ln(x)}{x^2}dx\leq\frac{\ln(k)}{k^2}\int_k^{k+1}dx$ ou encore : $\frac{\ln(k+1)}{(k+1)^2}\leq\int_k^{k+1}\frac{\ln(x)}{x^2}dx\leq\frac{\ln(k)}{k^2}$.

b) $\int_a^b\frac{1}{x^2}\ln x\ dx=\left[-\frac{1}{x}\ln x\right]_a^b-\int_a^b-\frac{1}{x}.\frac{1}{x}dx=\left[-\frac{1}{x}\ln x\right]_a^b-\left[\frac{1}{x}\right]_a^b=\left[-\frac{1}{x}\ln x-\frac{1}{x}\right]_a^b$.

3) a) En donnant successivement à k les valeurs 2 ;3 ;4 ;….. ; n – 1 on obtient (n – 2) inégalités doubles ; ajoutons-les membre à membre on obtient : $\sum_{k=2}^{k=n-1}\frac{\ln(k+1)}{(k+1)^2}\leq\sum_{k=2}^{k=n-1}\int_k^{k+1}\frac{\ln(x)}{x^2}dx\leq\sum_{k=2}^{k=n-1}\frac{\ln(k)}{k^2}$. La première somme s'écrit :

Qarray.tn - Aqra Bich - Qarray.tn

Devoir.tn
Toutes les matières, tous les niveaux...